JOHN NEPER (1550-1617) Rico terrateniente escocés; era Barón de Merchiston. Logró convertirse en uno de los más geniales matemáticos ingleses, al dedicarse en sus ratos de ocio al cultivo de los números. Introdujo el punto decimal para separar las cifras decimales de las enteras. Al observar las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas descubrió el principio que rige a los logaritmos. Entre Neper y Bürgi surgió una discusión acerca de quién había sido el primero en trabajar con los logaritmos.

CAPITULO XVIII

FORMULAS

(237) FORMULA es la expresión de una ley o de un principio general por medio de símbolos o letras.

Así, la Geometría enseña que el **área** de un triángulo es igual a la mitad del producto de su **base** por su **altura**. Llamando A al área de un triángulo, b a la base y h a la **altura**, este principio general se expresa **exacta y brevemente** por la fórmula

$$A=\frac{b\times h}{2}$$

que nos sirve para hallar el área **de cualquier triángulo** con sólo sustituir b y h por **sus** valores concretos en el caso dado. Así, si la base de un triángulo es 8 m y su altura 3 m, su área será:

$$A=\frac{8\times 3}{2}=12\text{ m}^2$$

(238) USO Y VENTAJA DE LAS FORMULAS ALGEBRAICAS

Las fórmulas algebraicas son usadas en las ciencias, como Geometría, Física, Mecánica, etc., y son de enorme utilidad como apreciará el alumno en el curso de sus estudios.

La **utilidad** y **ventaja** de las fórmulas algebraicas es muy grande:

1) Porque expresan **brevemente** una ley o un principio general. 2) Porque son fáciles de recordar. 3) Porque su aplicación es muy fácil,

pues para resolver un problema por medio de la fórmula adecuada, basta sustituir las letras por sus valores en el caso dado. 4) Porque una fórmula nos dice la **relación** que existe entre las variables que en ella intervienen, pues según se ha probado en Aritmética, la variable cuyo valor se da por medio de una fórmula es **directamente proporcional** con las variables (factores) que se hallan en el **numerador** del segundo miembro e **inversamente proporcional** con las que se hallen en el **denominador**, si las demás permanecen constantes.

(239) TRADUCCION DE UNA FORMULA DADA AL LENGUAJE VULGAR

Para traducir una fórmula al lenguaje vulgar, o sea, para **dar la regla** contenida en una fórmula, basta sustituir las letras por las magnitudes que ellas representan y expresar las relaciones que la fórmula nos dice existen entre ellas. Pondremos dos ejemplos:

1) Dar la regla contenida en la fórmula $A=h\left(\frac{b+b'}{2}\right)$, en que A representa el área de un trapecio, h su altura, b y b' sus bases.

La **regla** es: **El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases.**

2) Dar la regla contenida en la fórmula $v=\frac{e}{t}$, en que v representa la **velocidad** de un móvil que se mueve con movimiento uniforme y e el **espacio** recorrido en el **tiempo** t.

La regla es: **La velocidad de un móvil que se mueve con movimiento uniforme es igual al espacio que ha recorrido dividido entre el tiempo empleado en recorrerlo.**

En cuanto a la **relación** de v con e y t, la fórmula me dicta las dos **leyes** siguientes:

1) La **velocidad** es **directamente** proporcional al **espacio** (porque e está en el numerador) para un mismo tiempo.

2) La **velocidad** es **inversamente** proporcional al **tiempo** (porque t está en el denominador) para un mismo espacio.

EJERCICIO 160

Dar la regla correspondiente a las fórmulas siguientes:

1. $A=\frac{1}{2}bh$ siendo A el área de un triángulo, b su base y h su altura.
2. $e=vt$, siendo e el espacio recorrido por un móvil con movimiento uniforme, v su velocidad y t el tiempo.

3. $t = \frac{e}{v}$. Las letras tienen el significado del caso anterior.
4. $T = Fe$, siendo T trabajo, F fuerza y e camino recorrido.
5. $A = \frac{D \times D'}{2}$ siendo A el área de un rombo y D y D' sus diagonales.
6. $V = h \times B$, siendo V el volumen de un prisma, h su altura y B el área de su base.
7. $V = \frac{1}{3}h \times B$, siendo V el volumen de una pirámide, h su altura y B el área de su base.
8. $A = \pi r^2$, siendo A el área de un círculo y r el radio. (π es una constante igual a 3.1416 o $\frac{22}{7}$).
9. $e = \frac{1}{2}gt^2$, siendo e el espacio recorrido por un móvil que cae libremente desde cierta altura partiendo del reposo, g la aceleración de la gravedad (9.8 m. por seg.) y t el tiempo empleado en caer.
10. $A = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$, siendo A el área de un triángulo equilátero y l su lado.
11. $F = \frac{mv^2}{r}$, siendo F la fuerza centrífuga, m la masa del móvil, v su velocidad y r el radio de la circunferencia que describe.

(240) EXPRESAR POR MEDIO DE SIMBOLOS UNA LEY MATEMATICA O FISICA OBTENIDA COMO RESULTADO DE UNA INVESTIGACION

Cuando por la investigación se ha obtenido una ley matemática o física, para expresarla por medio de símbolos, o sea para escribir su **fórmula**, generalmente se designan las variables por las **iniciales** de sus nombres y se escribe con ellas una expresión en la que aparezcan las **relaciones** observadas entre las variables.

Ejemplos

(1) Escribir una fórmula que exprese que la *altura* de un triángulo es igual al duplo de su área dividido entre la base.

Designando la altura por h, el área por A y la base por b, la fórmula será: $h = \frac{2A}{b}$

(2) Escribir una fórmula que exprese que la *presión* que ejerce un líquido sobre el fondo del recipiente que lo contiene es igual a la *superficie* del fondo multiplicada por la *altura* del líquido y por su *densidad*.

Designando la presión por P, la superficie del fondo del recipiente por S, la altura del líquido por h y su densidad por d, la fórmula será: $P = Shd$.

EJERCICIO 161

Designando las variables por la inicial de su nombre, escriba la fórmula que expresa:

1. La suma de dos números multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

2. El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
3. La base de un triángulo es igual al duplo de su área dividido entre su altura.
4. La densidad de un cuerpo es igual al peso dividido por el volumen.
5. El peso de un cuerpo es igual al producto de su volumen por su densidad.
6. El área de un cuadrado es igual al cuadrado del lado.
7. El volumen de un cubo es igual al cubo de su arista.
8. El radio de una circunferencia es igual a la longitud de la circunferencia dividida entre 2π.
9. El cuadrado de un cateto de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.
10. El área de un cuadrado es la mitad del cuadrado de su diagonal.
11. La fuerza de atracción entre dos cuerpos es igual al producto de una constante k por el cociente que resulta de dividir el producto de las masas de los cuerpos por el cuadrado de su distancia.
12. El tiempo que emplea una piedra en caer libremente desde la boca al fondo de un pozo es igual a la raíz cuadrada del duplo de la profundidad del pozo dividido entre 9.8.
13. El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto de su apotema por el perímetro.
14. La potencia de una máquina es igual al trabajo que realiza en 1 segundo.

(241) EMPLEO DE FORMULAS EN CASOS PRACTICOS

Basta sustituir las letras de la fórmula por sus valores.

Ejemplos

(1) Hallar el área de un trapecio cuya altura mide 5 m y sus bases 6 y 8 m respectivamente.

La fórmula es $A = h\left(\frac{b+b'}{2}\right)$

Aquí, $h = 5$ m., $b = 6$ m., $b' = 8$ m., luego sustituyendo: $A = 5\left(\frac{6+8}{2}\right) = 5 \times 7 = 35\ m^2$. R.

(2) Hallar el volumen de una pirámide siendo su altura 12 m y el área de la base 36 m^2.

La fórmula es $V = \frac{1}{3}h \times B$.

Aquí, $h = 12$ m, $B = 36\ m^2$, luego sustituyendo:

$$V = \frac{1}{3} \times 12 \times 36 = 4 \times 36 = 144\ m^3.\quad R.$$

(3) Una piedra dejada caer desde la azotea de un edificio tarda 4 segundos en llegar al suelo. Hallar la altura del edificio.
La altura del edificio es el espacio que recorre la piedra.

La fórmula es: $e = \frac{1}{2}gt^2$.

g vale 9.8 m. y $t = 4$ seg., luego sustituyendo:

$$e = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 4^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 16 = 9.8 \times 8 = 78.4 \text{ m}$$

La altura del edificio es 78.4 m. R.

EJERCICIO 162

1. Hallar el área de un triángulo de 10 cm de base y 8 de altura. $A = \frac{1}{2}bh$.
2. Hallar el área de un cuadrado cuya diagonal mide 8 m. $A = \frac{d^2}{2}$.
3. ¿Qué distancia recorre un móvil en 15 seg. si se mueve con movimiento uniforme y lleva una velocidad de 9 m por seg? $e = vt$.
4. ¿En qué tiempo el mismo móvil recorrerá 108 m?
5. Hallar la hipotenusa a de un triángulo rectángulo siendo sus catetos $b = 4$ m y $c = 3$ m. $a^2 = b^2 + c^2$.
6. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 m y uno de los catetos 5 m. Hallar el otro cateto. $b^2 = a^2 - c^2$.
7. Hallar el área de un círculo de 5 m de radio. $A = \pi r^2$, $\pi = \frac{22}{7}$.
8. Hallar la longitud de una circunferencia de 5 m de radio. $C = 2\pi r$.
9. Hallar el volumen de un cono siendo su altura 9 m y el radio de la base 2 m. $v = \frac{1}{3}h\pi r^2$.
10. El volumen de un cuerpo es 8 cm³, y pesa 8.24 g. Hallar su densidad. $D = \frac{P}{V}$.
11. Hallar el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 4 m. $A = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$.
12. Hallar la suma de los ángulos interiores de un exágono regular. $S = 180°(N - 2)$. (N es el número de lados del polígono).

242 CAMBIO DEL SUJETO DE UNA FORMULA

El **sujeto** de una fórmula es la variable cuyo valor se da por medio de la fórmula. Una fórmula es una ecuación literal y nosotros podemos despejar cualquiera de los elementos que entran en ella, considerándolo como incógnita, y con ello **cambiamos el sujeto** de la fórmula.

Ejemplos

(1) Dada la fórmula $e = \frac{1}{2}at^2$ hacer a t el sujeto de la fórmula.
Hay que despejar t en esta ecuación literal; t es la incógnita.
Suprimiendo denominadores, tenemos:

$$2e = at^2.$$

Despejando t^2: $t^2 = \frac{2e}{a}$.

Extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros: $t = \sqrt{\frac{2e}{a}}$. R.

(2) Dada la fórmula $S = 2R(N - 2)$ hacer a N el sujeto de la fórmula.
Hay que despejar N. N es la incógnita.
Efectuando el producto indicado: $S = 2NR - 4R$.
Transponiendo: $S + 4R = 2NR$

$$N = \frac{S + 4R}{2R}. \quad R.$$

(3) En la fórmula $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ despejar p'.

El m. c. m. de los denominadores es $pp'f$. Quitando denominadores tendremos:

$$pp' = p'f + pf.$$

La incógnita es p'. Transponiendo: $pp' - p'f = pf$

$$p'(p - f) = pf$$

$$p' = \frac{pf}{p - f}. \quad R.$$

(4) Despejar a en $v = \sqrt{2ae}$.
Elevando al cuadrado ambos miembros para destruir el radical:

$$v^2 = 2ae.$$

Despejando a: $a = \frac{v^2}{2e}$. R.

Esta operación de cambiar el sujeto de una fórmula será de incalculable utilidad para el alumno al **Matemática y Física**.

EJERCICIO 163

1. En la fórmula $e = vt$, despejar v y t.
2. En $A = h\left(\frac{b+b'}{2}\right)$ hacer a h el sujeto de la fórmula.
3. En $e = \frac{1}{2}at^2$, despejar a.
4. En $A = \frac{1}{2}aln$, despejar a, l y n.
5. En $A = \pi r^2$, despejar r.
6. En $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times x$, despejar x.
7. En $V = V_o + at$, despejar V_o, a y t.
8. En $V = V_o - at$, despejar V_o, a y t.
9. En $D = \frac{P}{V}$, despejar V y P.
10. En $a^2 = b^2 + c^2$, despejar b y c.
11. En $V = at$, despejar a y t.
12. En $\frac{1}{f} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$, despejar p' y p.
13. En $v = \sqrt{\frac{e}{d}}$, despejar d y e.
14. En $e = V_o t + \frac{1}{2}at^2$, despejar V_o.
15. En $e = V_o t - \frac{1}{2}at^2$, despejar V_o y a.
16. En $V = \frac{1}{3}h\pi r^2$, despejar h y r.
17. En $I = \frac{c \times t \times r}{100}$, despejar c, t y r.
18. En $E = IR$, despejar R e I.
19. En $e = \frac{v^2}{2a}$, despejar v.
20. En $u = a + (n - 1)r$, despejar a, n y r.
21. En $u = ar^{n-1}$, despejar a y r.
22. En $I = \frac{Q}{t}$, despejar Q y t.